ジョイングラフに付随する対称辺凸多面体のファセット数

関西学院大学　理学部　数理科学科
毛利健太 (Kenta MORI) *

概要

対称辺凸多面体は多くの分野で研究されている多面体である。講演では対称辺凸多面体のファセットの個数の上限と下限の予想をジョイングラフに対して解決した結果を紹介する。これは NIll による d 次元の反射的凸多面体に対するファセットの個数の上限に関する予想を部分的に解決している結果でもある。また、本講演は森亜貴氏、大杉英史氏との共同研究 [7] に基づく。

1　導入

任意の頂点が格子点の凸多面体を**格子凸多面体**という。また、次元 d の多面体 $\mathcal{P}$ について次元 $d-1$ の面を多面体 $\mathcal{P}$ の**ファセット**という。

定義 1.1　格子凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ について $\mathbf{0}$ が内部に存在するただ一つの格子点であり、$\mathcal{P}$ の双対多面体

$$\mathcal{P}^* := \{x \in \mathbb{R}^n : 任意の\ y \in \mathcal{P}\ に対して\ x \cdot y \leq 1\}$$

が格子凸多面体であるとき、$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ は**反射的**であるという。また、このとき $\mathcal{P}^*$ の各頂点は $\mathcal{P}$ のファセットに対応する。

例 1.2　図 1 の多面体 $\mathcal{P}$ は反射的であり、そのファセットの個数は 6 である。

$N(\mathcal{P})$ を格子凸多面体 $\mathcal{P}$ のファセットの個数とする。このとき以下の予想が存在する。

予想 1.3（[8, Conjecture 5.2]）　$\mathcal{P}$ を d 次元の反射的凸多面体とする。このとき $N(\mathcal{P}) \leq 6^{d/2}$ が成り立つ。

ここで、グラフから生起される反射的凸多面体を導入する。G を頂点集合 $[n] := \{1, \ldots, n\}$、辺集合 $E(G)$ の有限単純グラフとする。このとき e_i を $\mathbb{R}^n$ の i 番目の標準基底とすると、G の対称辺凸多面体 $\mathcal{P}_G$ は $\{\pm(e_i - e_j) : \{i, j\} \in E(G)\}$ の凸閉包である。有限グラフの対称辺凸多面体は任意のグラフに対して反射的であることが知られている。また、頂点数 n の連結グラフに対して対称辺凸多面体の次元は $n-1$ である。

例 1.4　頂点集合が $\{1,\ 2,\ 3\}$ であるグラフ C_3 に付随する対称辺多面体 P_{C_3} は、頂点 $(1, -1, 0)$、$(-1, 1, 0)$、$(0, 1, -1)$、$(0, -1, 1)$、$(1, 0, -1)$、$(-1, 0, 1)$ の凸閉包で得られる $\mathbb{R}^3$ 上の六角形となる。

* E-mail:k-mori@kwansei.ac.jp

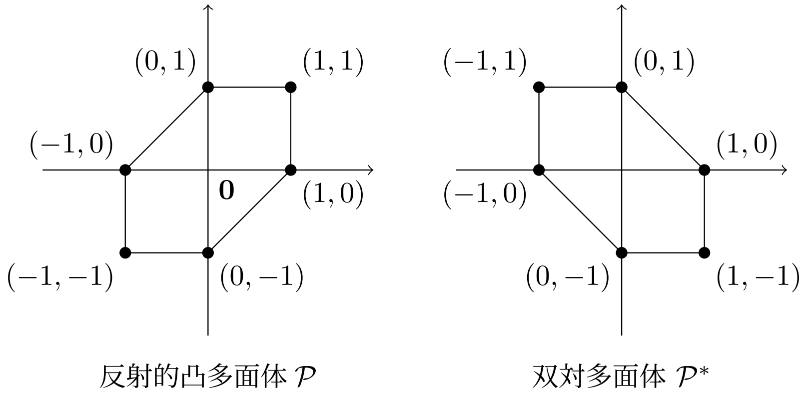

図 1　反射的凸多面体 $\mathcal{P}$ とその双対多面体 $\mathcal{P}^*$

対称辺凸多面体は多くの分野で研究されている。まず、エルハート理論の分野において反射的凸多面体の h^* 多項式は回文的、つまり係数の列が対称となることが知られている。さらに、完全二部グラフの対称辺凸多面体の h^* 多項式は [5] で明示的に与えられており、その証明においてファセットの記述は大きく貢献している。また、h^* 多項式の注目を集めている性質として γ 非負性があるが、対称辺凸多面体の γ 非負性は [4, 6, 9, 10] で研究されている。違う分野に関して、対称辺凸多面体は蔵本モデルに対して “adjacency polytope” という名前で応用されている。対称辺凸多面体の正規化体積が蔵本モデルの解の個数の上限を与えることが知られており、対称辺凸多面体の正規化体積は対称辺凸多面体のファセットの記述を使って与えられる。

2 つのグラフ G_1 と G_2 が 1 頂点を共有することで得られるグラフを G_1 と G_2 の **1-sum** という。同様に、複数のグラフに対してもそれらが 1 頂点を共有することで得られるグラフをそれらの 1-sum という。ここで、[5] により完全二部グラフ $K_{\ell,m}$ および完全多部グラフ $K_{\ell_1,\dots,\ell_s}(s \geq 3)$ に対して $N(\mathcal{P}_{K_{\ell,m}}) = 2^\ell + 2^m - 2$、$N(\mathcal{P}_{K_{\ell_1,\dots,\ell_s}}) = 2^{\sum_{i=1}^s \ell_i} - \sum_{i=1}^s (2^{\ell_i} - 2) - 2$ となることが与えられている。特に完全グラフ K_n に対して $N(\mathcal{P}_{K_n}) = 2^n - 2$ となる。Braun と Bruegge により以下の予想が与えられている。

予想 1.5（[1, Conjecture 2]）　G を $n \geq 3$ の連結グラフとする。このとき

(1)　n が奇数ならば、$3 \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} - 2 \leq N(\mathcal{P}_G) \leq 6^{\frac{n-1}{2}}$ が成り立つ。さらに、
- $N(\mathcal{P}_G) = 3 \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} - 2$ と G が $K_{(n-1)/2,(n+1)/2}$ であることが同値である。
- $N(\mathcal{P}_G) = 6^{\frac{n-1}{2}}$ と G が $(n-1)/2$ 個の triangle の 1-sum であることが同値である。

(2)　n が偶数ならば、$2^{\frac{n}{2}+1} - 2 \leq N(\mathcal{P}_G) \leq 14 \cdot 6^{\frac{n}{2}-2}$ が成り立つ。さらに、
- $N(\mathcal{P}_G) = 2^{\frac{n}{2}+1} - 2$ と G が $K_{n/2,n/2}$ であることが同値である。
- $N(\mathcal{P}_G) = 14 \cdot 6^{\frac{n}{2}-2}$ と G が K_4 と $n/2 - 2$ 個の triangle の 1-sum であることが同値である。

[1] において予想 1.5 に対して辺の本数が少ないグラフの対称辺凸多面体について結果が与えられている。

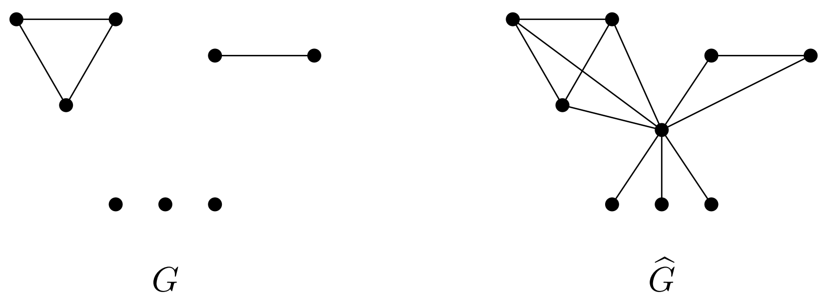

図 2　グラフ G とそのサスペンションによって得られるグラフ $\widehat{G}$

2　主定理

$G_1 = (V, E)$、$G_2 = (V', E')$ を $V \cap V' = \emptyset$ であるようなグラフとする。このとき G_1 と G_2 の**ジョイン**は頂点集合 $V \cup V'$、辺集合 $E \cup E' \cup \{\{i, j\} : i \in V, j \in V'\}$ のグラフであり、$G_1 + G_2$ とかく。グラフ G と K_1 のジョインを G の**サスペンション**といい、$\widehat{G}$ とかく。グラフのサスペンションは図 2 を参照していただきたい。

任意のグラフのサスペンションに対して以下を示した。

定理 2.1　$n \geq 2$ に対して G を頂点集合 $[n-1]$ のグラフとする。このとき

$$N(\mathcal{P}_{\widehat{G}}) \geq 2^{n-1}$$

であり、G が空グラフのとき等号が成り立つ。また

$$N(\mathcal{P}_{\widehat{G}}) \leq \begin{cases} 6^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ が奇数のとき} \\ 14 \cdot 6^{\frac{n}{2}-2} & n \text{ が偶数のとき} \end{cases}$$

であり以下のいずれかを満たすとき等号が成り立つ:

(a)　n は奇数であり、G は非連結な $(n-1)/2$ 個の辺である。つまり、$\widehat{G}$ は $(n-1)/2$ 個の triangle の 1-sum である。

(b)　n は偶数であり、G は非連結な $n/2-2$ 個の辺と 1 つの triangle である。つまり、$\widehat{G}$ は K_4 と $n/2-2$ 個の triangle の 1-sum である。

また、任意の 2 つのグラフのジョインに対して以下を示した。

定理 2.2　$G_1 = (V, E)$、$G_2 = (V', E')$ を $V \cap V' = \emptyset$ を満たすグラフとする。このとき $n = |V| + |V'|$ とすると、n が奇数であれば、

$$3 \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} - 2 \leq N(\mathcal{P}_{G_1+G_2}) \leq 6^{\frac{n-1}{2}}$$

が成り立つ。また n が偶数であれば

$$2^{\frac{n}{2}+1} - 2 \leq N(\mathcal{P}_{G_1+G_2}) \leq 14 \cdot 6^{\frac{n}{2}-2}$$

が成り立つ。

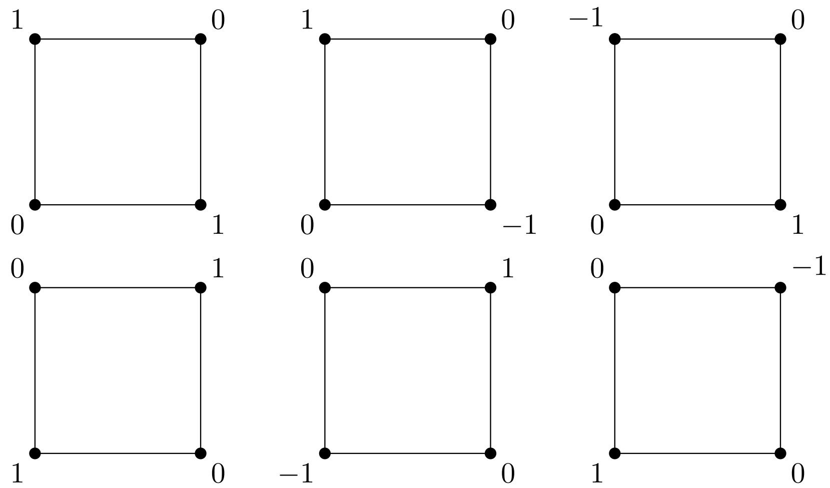

図 3　C_4 の対称辺凸多面体 $\mathcal{P}_{C_4}$ のファセットに対応するラベル付け

3　対称辺凸多面体のファセット

グラフ G の対称辺凸多面体 $\mathcal{P}_G$ のファセットに対して以下の特徴づけが知られている。

命題 3.1（[5, Theorem 3.1]）　$G=(V,E)$ を連結グラフとする。このとき $f:V\to\mathbb{Z}$ が $\mathcal{P}_G$ のファセットであることと以下を満たすことが同値である。

(i)　任意の $e=\{i,j\}\in E$ に対して、$|f(i)-f(j)|\leq 1$ である。

(ii)　辺の部分集合 $E_f:=\{e=\{i,j\}\in E:|f(i)-f(j)|=1\}$ により G の全域連結部分グラフが生成される。

$\mathcal{P}_G$ の $f:V\to\mathbb{Z}$ に対して $G_f=(V,E_f)$ を G のファセット部分グラフといい、ファセット部分グラフ全体を $FS(G)$ で表す。また、$H\in FS(G)$ に対して H によるファセットの数を $\mu(H)$ で表す。

命題 3.2（[2, Corollary 33]）　連結グラフ G の部分グラフ H がファセット部分グラフであることと H が G の極大連結全域二部部分グラフであることが同値である。

例 3.3　図 3 より C_4 の対称辺凸多面体 $\mathcal{P}_{C_4}$ のファセットは 6 個存在する。また、C_4 のファセット部分グラフは C_4 のみであり、$\mu(C_4)=6$ である。

また、二部グラフに対して以下の命題が知られている。

命題 3.4（[3, Corollary 33]）　G を頂点数 n の連結二部グラフとする。このとき、$N(\mathcal{P}_G)\leq 2^{n-1}$ であり等号成立は G が木のときである。

ここでグラフ G のブロックと対称辺凸多面体 $\mathcal{P}_G$ のファセットの個数の関連を紹介する。

定義 3.5　G を連結グラフとする。頂点 v に対して v を取り除くことで得られるグラフが非連結とな

るとき v を**切断点**という。また、切断点を持たない極大連結部分グラフを**ブロック**という。さらに、任意の頂点が切断点ではないグラフを **2-連結グラフ**という。

特に、任意のグラフはブロックの 1-sum によって構成される。2 つのグラフ G_1 と G_2 の 1-sum によるグラフ G から生起される対称辺凸多面体 $\mathcal{P}_G$ は $\mathcal{P}_{G_1}$ と $\mathcal{P}_{G_2}$ の直和となり、以下が従う。

命題 3.6（[1, Proposition 9]）　G を連結グラフ G_1 と G_2 の 1-sum とする。このとき $N(\mathcal{P}_G) = N(\mathcal{P}_{G_1})N(\mathcal{P}_{G_2})$ である。

　さらにこの命題より以下が従う。

命題 3.7　G を連結グラフ G_1 と G_2 の 1-sum によって得られるグラフとする。G_1 と G_2 が予想 1.5 を満たしていれば G も予想 1.5 をみたす。

4　サスペンショングラフ

　本研究の主結果である、グラフ G のサスペンションによって得られるグラフ $\widehat{G}$ の対称辺凸多面体 $\mathcal{P}_{\widehat{G}}$ のファセット数について紹介する。まず、グラフの支配集合の定義を確認する。

定義 4.1　グラフ G に対して $N_G(v) \subset V$ を v に隣接している頂点による集合とする。また、$N_G[v]$ を $N_G(v) \cup \{v\}$ とする。このとき $S \subset V$ が $\bigcup_{v \in S} N_G[v] = V$ を満たすならば S は G の**支配集合**である、という。

　次にグラフ G の支配集合と G のサスペンションによって得られるグラフ $\widehat{G}$ に関する補題を紹介する。

補題 4.2　G を $n-1$ 頂点のグラフとし、H を $n \in V_1$ をみたす $[n] = V_1 \sqcup V_2$ の $\widehat{G}$ の極大全域二部グラフとする。また、$c(G[V_2])$ を $G[V_2]$ の連結成分の数とする。このとき H が $\widehat{G}$ のファセット部分グラフであることと V_2 が G の支配集合であることが同値である。さらに、$\mu(H) = 2^{c(G[V_2])}$ が成り立つ。

　さらに、グラフ G とその頂点 v から得られるグラフを紹介する。

定義 4.3　$G = (V, E)$ とその頂点 v に対して以下の 3 つのグラフを定義する:

- $G - v$：G の $V \setminus \{v\}$ による誘導部分グラフ;
- $G - N_G[v]$：$N_G[v] \neq V$ に対して G の $V \setminus N_G[v]$ による誘導部分グラフ;
- G/v：G から v を取り除き $i, j \in N_G(v)$ に対して $\{i, j\}$ を加えることで得られるグラフ。

例 4.4　G を C_5 のサスペンションによって得られるグラフとし、v をサイクルの 1 頂点とすると、$G - v$、$G - N_G[v]$、G/v は図 4 のように与えられる。

　グラフ G と G から 1 頂点を選んで得られるグラフ $G - v$、$G - N_G[v]$、G/v との対称辺凸多面体のファセット数に対する以下の命題が補題 4.2 によって与えられる。

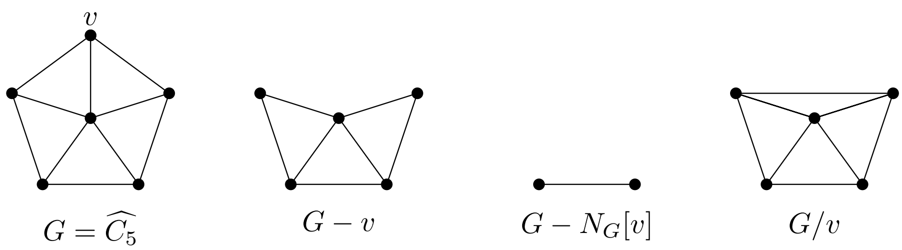

図 4　$\widehat{C_5}$ と頂点 v から得られるグラフ

命題 4.5　G を $n \geq 3$ に対して頂点集合 $[n-1]$ のグラフとする。
このとき G の頂点 v に対して、

$$N(\mathcal{P}_{\widehat{G-v}}) + N(\mathcal{P}_{\widehat{G/v}}) \quad \leq \quad N(\mathcal{P}_{\widehat{G}}) \quad \leq \quad N(\mathcal{P}_{\widehat{G-v}}) + 2N(\mathcal{P}_{\widehat{G-N_G[v]}}) + N(\mathcal{P}_{\widehat{G/v}})$$

が成り立つ。さらに $N_G[v] \neq [n-1]$ であれば

$$N(\mathcal{P}_{\widehat{G}}) \quad = \quad N(\mathcal{P}_{\widehat{G-v}}) + N(\mathcal{P}_{\widehat{G/v}}) + 2$$

が成り立つ。

この命題によって G のサスペンションによって得られるグラフ $\widehat{G}$ に対して $\widehat{G}$ から 1 頂点除いたグラフとファセット数を比較することが可能となり、数学的帰納法を駆使することで定理 2.1 の証明を完遂した。

5　ジョイングラフ

ジョイングラフに対して定理 2.2 の証明で大きく貢献する補題を紹介する。

補題 5.1　$G_1 = (V, E)$、$G_2 = (V', E')$ を $V \cap V' = \emptyset$、$|V| = n_1$ と $|V'| = n_2$ をみたすグラフとする。各 $i = 1, 2$ に対して m_i を G_i の連結成分の個数とする。このとき、

$$N(\mathcal{P}_{G_1+G_2}) \quad \leq \quad N(\mathcal{P}_{\widehat{G_1}}) + N(\mathcal{P}_{\widehat{G_2}}) + 2^{m_1} + 2^{m_2} - 2 + 4(2^{n_1-1} - 1)(2^{n_2-1} - 1).$$

が成り立つ。

定理 2.2、命題 3.4、命題 3.7 より予想 1.5 の解決のために条件:

- 2 つのグラフのジョインによってえられない（補グラフが連結グラフ）;
- 非二部である;
- 2-連結である。

をみたすグラフに焦点を定め、ファセット数を求めればよいことがわかった。

参考文献

[1] B. Braun and K. Bruegge, Facets of symmetric edge polytopes for graphs with few edges, *J. Integer Seq.* **26** (2023), Article 23.7.2.

[2] T. Chen, R. Davis, and E. Korchevskaia, Facets and facet subgraphs of symmetric edge polytopes, *Discrete Appl. Math.* **328** (2023), 139–153.

[3] A. D'Alì, E. Delucchi and M. Michałek, Many faces of symmetric edge polytopes, *Electron. J. Combin.* **29** (2022), Paper No. 3.24.

[4] A. D'Alì, M. Juhnke-Kubitzke, D. Köhne, and L. Venturello, On the gamma-vector of symmetric edge polytopes, *SIAM J. Discrete Math.* **37.2** (2023): 487-515.

[5] A. Higashitani, K. Jochemko, and M. Michałek, Arithmetic aspects of symmetric edge polytopes, *Mathematika* **65** (2019), 763–784.

[6] T. Kálmán and L. Tóthmérész, Ehrhart theory of symmetric edge polytopes via ribbon structures, preprint. `arXiv:2201.10501`.

[7] A.Mori, K.Mori and H.Ohsugi, Number of facets of symmetric edge polytopes arising from join graphs, arXiv:2312.11287

[8] B. Nill, Gorenstein toric Fano varieties, *Manuscripta Math.* **116** (2005) 183–210.

[9] H. Ohsugi and A. Tsuchiya, Symmetric edge polytopes and matching generating polynomials, *Combinatorial Theory* **1** (2021) # 9.

[10] H. Ohsugi and A. Tsuchiya, The h^*-polynomials of locally anti-blocking lattice polytopes and their γ-positivity, *Discrete Comput. Geom.* **66** (2021), 701–722.